

استفاده از توابع پایه در حل معادله دیفرانسیل لاپلاس در فضای سه بعدی

بشیر موحدیان عطار^۱، بیژن برومند^۲

۱- دانشجوی کارشناسی ارشد سازه دانشکده مهندسی عمران، دانشگاه صنعتی اصفهان

۲- دانشیار دانشکده مهندسی عمران، دانشگاه صنعتی اصفهان

b_movahedian@cv.iut.ac.ir

خلاصه

معادله دیفرانسیل لاپلاس در مدل سازی مسائل مهندسی، از جمله تحلیل بخش سیال در مسائل اثر متقابل سازه و سیال، نقش مهمی دارد بنابراین اهمیت بالا بردن دقت در حل این معادله واضح به نظر می رسد. در این مقاله روشی جدید برای حل معادله دیفرانسیل لاپلاس در فضای سه بعدی ارائه شده است. اساس این روش که در واقع نوعی روش بدون شبکه محسوب می شود، تقریب جواب معادله دیفرانسیل با استفاده از سری متشکل از توابع پایه می باشد. بررسی های انجام گرفته نشان می دهد که استفاده از این روش ضمن کاهش هزینه محاسبات، دقت نتایج را به میزان قابل توجهی افزایش می دهد.

کلمات کلیدی: معادلات دیفرانسیل سه بعدی، معادله لاپلاس، روش بدون شبکه، توابع پایه

۱. مقدمه

پیشرفت چشمگیر فن آوری کامپیوتر باعث توجه فراوان محققین و مهندسان نسبت به توسعه روش های عددی شده است. از جمله این روش ها می توان به روش اجزاء محدود، روش تفاضل محدود و روش های بدون شبکه اشاره کرد. یکی از روش هایی که در چند دهه اخیر مورد توجه ویژه محققین قرار گرفته است روش حل اساسی^۱ می باشد. بر اساس مطالب عنوان شده در مرجع [۱] این روش که در واقع نوعی روش بدون شبکه محسوب می شود برای اولین بار در اواسط دهه ۶۰ میلادی توسط الکسیدزه و کوپراذه، دو محقق روسی معرفی گردید. فرمول بندی کامل این روش در سال ۱۹۷۷ توسط میتون و جانسون ارائه شد. ایده اصلی این روش تقریب جواب معادله دیفرانسیل با ترکیب خطی توابع گرین صدق کننده در معادله دیفرانسیل به صورت یک سری می باشد. بدین ترتیب حل مساله اولیه به برآورد ضرائب ثابت سری با ارضای شرایط مرزی کاهش می یابد. در برآورد ضرائب ثابت سری از روش های متداول مانند روش نقطه ای و یا روش حداقل مربعات، برای ارضای شرایط مرزی استفاده می شود.

در این مقاله روش جدیدی مشابه روش حل اساسی برای حل معادلات دیفرانسیل ارائه می گردد. اساس این روش تقریب جواب معادله دیفرانسیل با استفاده از سری متشکل از توابع پایه صدق کننده در معادله دیفرانسیل می باشد. منظور از توابع پایه در این روش توابع نمایی می باشد. ویژگی اصلی این روش، برآورد ضرائب ثابت این سری با استفاده از تبدیلی ویژه است. این تبدیل برای اولین بار در مرجع [۲] و در حل مسائل انتشار امواج در محیط های نیمه بی نهایت به روش المان های محدود معرفی گردید. استفاده از این تبدیل در مقایسه با سایر روش های متداول مانند روش نقطه ای و یا روش حداقل مربعات، دارای مزایای ویژه ای است که در ادامه به آن اشاره خواهد شد. سقراطی در سال ۱۳۸۶ از روش مذکور برای حل چند معادله دیفرانسیل دوبعدی از جمله معادله لاپلاس، معادله هلمهولتز و معادلات الاستیسیته استفاده کرد. نکته اصلی در این تحقیق ارائه الگویی مناسب برای انتخاب توابع پایه و فرمول بندی کامل این روش برای حل معادلات دوبعدی با انواع شرایط مرزی و انواع اشکال ناحیه حل می باشد [۳].

در این مقاله ابتدا به معرفی معادله لاپلاس و کاربرد آن در مسائل مهندسی پرداخته می شود. سپس روش ارائه شده در مرجع [۳]، برای حل معادله لاپلاس در فضای سه بعدی توسعه داده می شود. نکته اصلی در این قسمت توسعه روابط در حل معادلات دو بعدی برای حل معادلات سه بعدی می باشد. در ادامه الگویی جدید برای انتخاب توابع پایه بر مبنای میزان نوسان شرایط مرزی ارائه می گردد. در پایان در قسمت نتایج، با ارائه چند مثال، دقت بسیار مناسب این روش در تقریب جواب معادله دیفرانسیل لاپلاس سه بعدی مشخص می گردد.

¹ Method of the fundamental solutions