

حلقه‌های n -جمعی

زهره عبداللهی، فارغ التحصیل کارشناسی ارشد ریاضی، دانشگاه شاهرود zohre1889@yahoo.com

علی‌رضا اشرفی، عضو هیأت علمی ریاضی، دانشگاه کاشان ashrafi@kashanu.ac.ir

چکیده: حلقه متناهی و غیردوری R را n -جمعی می‌نامیم هرگاه بتوان آن را به صورت اجتماع n زیرحلقه آن نوشت ولی به صورت اجتماع کمتر از n زیرحلقه نتوان نوشت. در صورتی که R ، n -جمعی باشد، n را با $\sigma(R)$ نشان می‌دهیم. در این مقاله $\sigma(R)$ را برای حلقه‌های از مرتبه p^2 و p^3 به طور کامل محاسبه می‌کنیم.

کلمات کلیدی: حلقه متناهی، حلقه n جمعی

مقدمه

حال به سادگی می‌توان دید

$$R = S_1 \cup S_2 \cup S_3$$

و به علاوه $S_1 \cap S_2 \cap S_3$ ایده‌آلی از R بوده و حلقه $\frac{R}{S_1 \cap S_2 \cap S_3}$ با حلقه $Z_2 \times Z_2$ یکرخت است. بنابراین طبیعی است تا بررسی کنیم که آیا مشابهی حلقه‌ای برای نتیجه اسکورزا وجود دارد؟ در ادامه به توصیف حلقه‌های متناهی از مرتبه p^2 که p اول است می‌پردازیم. فرض کنیم R چنین حلقه‌ای باشد

گروه جمعی R یک گروه آبلی است لذا حاصل ضرب مستقیمی از گروه‌های دوری است. فرض کنید این گروه‌ها دارای مولدهای $g_1, \dots, g_k$ با مرتبه‌های به ترتیب $m_1, \dots, m_k$ باشند. بنابراین عناصر این حلقه

بنابر مساله‌ای معروف در نظریه گروه‌ها هیچ گروهی را نمی‌توان به صورت اجتماعی از دو زیرگروه سره آن نوشت. در سال ۱۹۲۶ ریاضیدانی ایتالیایی به نام اسکورزا در مرجع [8] ثابت نمود که گروه G قابل نوشتن به صورت اجتماعی از سه زیرگروه متمایز A, B, C است اگر و تنها اگر این سه زیرگروه دارای اندیس 2 در G بوده و $\frac{G}{A \cap B \cap C}$ با $Z_2 \times Z_2$ یکرخت است. با توجه به استدلال اسکورزا می‌توان دید که هیچ حلقه‌ای را نمی‌توان به صورت اجتماعی از دو زیرحلقه سره آن نوشت با وجود این می‌توان حلقه‌ای چون R ساخت که اجتماع سه زیرحلقه سره آن باشد این حلقه اولین بار توسط روزا در مرجع [1] ارائه گردید. فرض کنیم $R = Z[X]$ حلقه چند جمله‌ایها روی Z باشد. تعریف می‌کنیم:

توسط k^2 حاصلضرب به شکل

$$g_i g_j = \sum_{t=1}^k c_{ij}^t g_t \quad c_{ij} \in Z_{m_t}$$

مشخص می‌شوند. در ادامه تعاریفی از نظریه گروه

$$S_1 = \{f \in Z[X] : 2 \mid f(0)\},$$

$$S_2 = \{f \in Z[X] : 2 \mid f(1)\},$$

$$S_3 = \{f \in Z[X] : 2 \mid f(0) + f(1)\}.$$