

یک روش تفاضل متناهی غیراستاندارد برای حل مدل اپیدمیک SIR

محمد مهدی زاده

دانشکده علوم پایه، دانشگاه مراغه، مراغه، ایران

Muhammad.mehdizade@gmail.com

شهین حیدری

دانشکده علوم پایه، دانشگاه مراغه، مراغه، ایران

sh1990.heydari@gmail.com

چکیده

در این مقاله یک روش تفاضل متناهی غیراستاندارد برای حل عددی یک مدل اپیدمیولوژیک ارائه می‌دهیم. روش پیشنهادی علاوه بر پایداری خطی، خواص کیفی دستگاه معادلات اصلی از جمله مثبت بودن، کرانداری و قانون بقا را حفظ می‌کند.

واژگان کلیدی: خاصیت مثبت بودن؛ روش تفاضل متناهی غیراستاندارد؛ کرانداری؛ مدل SIR.

Mathematics Subject Classification 2010: 65L05; 65L06; 65L12.

۱. پیش‌گفتار

یکی از مشکلات اساسی در مطالعه دستگاه معادلات دیفرانسیل غیرخطی، عدم وجود جواب واقعی است. بنابراین از روش‌های عددی برای به دست آوردن اطلاعات مفید در رفتار جواب‌های ممکن این‌گونه معادلات، استفاده می‌شود. از جمله روش‌های عددی می‌توان به روش تفاضلات متناهی استاندارد برای گسسته‌سازی این‌گونه معادلات اشاره کرد. عموماً برای این‌گونه روش‌ها، سازگاری جواب با معادله دیفرانسیل اصلی و پایداری عددی که همگرایی روش را تضمین می‌کنند، بررسی می‌شوند. گاهی اوقات با روش‌های استاندارد خواص کیفی اساسی به جواب عددی منتقل نمی‌شوند. یکی از راه‌ها برای پرهیز از این اشکالات، گسترش روش‌های تفاضل متناهی به انواع غیراستاندارد آن‌ها است که برای اولین بار توسط میکنز^۱ در [۴] ارائه شده است. روش میکنز عبارت است از دوباره‌سازی مخرج کسر مشتقات گسسته و تقریب غیرموضعی جملات غیرخطی. اکنون به خلاصه‌ای از روش‌های غیراستاندارد برای حل معادلات دیفرانسیل معمولی اشاره می‌کنیم.

دستگاه معادله دیفرانسیل معمولی زیر را در نظر می‌گیریم:

$$Du = \frac{du}{dt} = f(t, u), \quad u(t_0) = u_0, \quad (1)$$

که u در حالت کلی تابعی n بعدی به صورت $u: [t_0, T) \rightarrow C^n$ و متناظراً f به صورت $f: ([t_0, T), C^n) \rightarrow ([t_0, T), C^n)$ می‌باشد. اگر $t_k = t_0 + hk$ که h یک طول گام مثبت است و

$$u_k \approx u(t_k),$$

آنگاه شکل گسسته معادله (۱) به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$D_h u_k = F(t_k, f, u_k), \quad (2)$$

که $D_h u_k$ نشان دهنده شکل گسسته Du و $F_k(t_k, f, u_k)$ تقریبی از $f(t, u(t_k))$ است.

تعریف ۱.۱. روش (۲) را یک روش تفاضل متناهی غیراستاندارد گوئیم اگر حداقل یکی از شرایط زیر برقرار باشد:

• در مشتق گسسته مرتبه اول $D_h u_k$ ، مخرج متداول h به وسیله یک تابع نامنفی $\varphi(h)$ طوری که

$$\varphi(h) = h + o(h^2), \quad h \rightarrow 0, \quad (3)$$

جایگزین شود.

• جمله غیرخطی $f(u)$ به صورت غیرموضعی تقریب زده شود به عبارت دیگر به وسیله تابع مناسب از گره‌های مختلف مرتبط. برای مثال:

$$u^2(t_k) \approx u_k u_{k+1}, \quad u^3(t_k) \approx \frac{2u_{k+1}^2 u_k}{(u_{k+1} + u_k)}.$$

برای جزئیات بیشتر به [۲، ۴] رجوع شود.

در این مقاله با تکیه بر قوانین میکنز یک روش غیراستاندارد جدید برای حل یک دستگاه معادلات غیرخطی که بیماری سیاه‌سرفه را مدل می‌کند، ارائه می‌دهیم. روش پیشنهادی از دقت بالایی برخوردار است و خواص کیفی مثبت بودن، کرانداری و بقا را حفظ می‌کند.

^۱Mickense