

برآوردگر بیزی قابلیت اعتماد توزیع لجستیک

سمانه محمدی جارچلو

اداره کل آموزش و پرورش آذربایجان غربی، شهرستان ارومیه

statistics1362@gmail.com

حسین جباری خامنه‌ای

گروه آمار، دانشگاه تبریز

h-jabbari@tabrizu.ac.ir

چکیده

برآوردگرهای بیزی تابع قابلیت اعتماد توزیع لجستیک با استفاده از روش‌های لیندلی (۱۹۸۰) و تایرنی و کادن (۱۹۸۶) به دست می‌آیند. توابع خطای مربع و تابع زیان مربع خطای لگ-بختها استفاده می‌شوند. مثال عددی نیز ارائه می‌شود.

واژگان کلیدی: توابع زیان؛ توزیع پسین؛ توزیع پیشین غیر آگاهی‌دهنده؛ نسبت لگ-بختها.

۱. پیش‌گفتار

توزیع لجستیک اغلب به عنوان جایگزینی برای توزیع نرمال در نظر گرفته می‌شود. توزیع لجستیک شکلی بسیار مشابه با توزیع نرمال دارد ولی دنباله آن سنگینتر از توزیع نرمال می‌باشد. ”موده‌وکر و جورج (۱۹۷۸)” نشان داده‌اند که شکل آن حتی مشابه با توزیع t با ۹ درجه آزادی از توزیع نرمال می‌باشد. ”گوپا و گانادیسکان (۱۹۶۶)” برآورد پارامترهای این توزیع را در نظر گرفتند. ”گوپا، کورشی و شاه (۱۹۶۸)” و ”چان، چان و مید (۱۹۷۱)” بهترین برآوردگرهای نااریب خطی از پارامترها را با اشاره از آمار مرتب [۱] بدست آوردند. ”د آگستینو و لی (۱۹۷۱)” برآورد خطی پارامترهای لجستیک را برای نمونه‌های کامل یا دم سانسور شده [۴] را در نظر گرفتند. ”هاتر و مور (۱۹۶۷)” برآورد حداکثر درستنمایی (mle) پارامترهای نمونه‌های سانسور شده [۶] را بررسی کردند. استنباطهای پارامترهای این توزیع توسط ”آنتل، کلیمکو و هارکنس (۱۹۷۰)” و شفر و شفیلد (۱۹۷۳)” بررسی شده است. ”باین (۱۹۷۳)، استمن و انگلهارد (۱۹۷۳)، باین و اسمیت (۱۹۷۴)” و پلاک (۱۹۵۹)”， توزیع‌های لجستیک را به عنوان مدل‌های آزمون طول عمر [۲] مورد مطالعه قرار داده‌اند. ”باین (۱۹۷۸)” این توزیع را به عنوان جایگزین سودمند در توزیع ویبول در آزمون طول عمر [۳] پیشنهاد کردند. تابع چگالی احتمال لجستیک را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$f(X) = \frac{\frac{c}{\sigma} e^{-c(X-\mu)/\sigma}}{[1 + e^{-c(X-\mu)/\sigma}]^2} \quad \begin{matrix} -\infty < x < \infty, \\ -\infty < \mu < \infty, \\ \sigma > 0, \end{matrix} \quad (1)$$

هرگاه $\mu.c = \frac{\pi}{\sqrt{3}}$ میانگین و σ انحراف معیار توزیع می‌باشد.

در این مقاله ما برآورد بیزی تابع قابلیت اعتماد را با استفاده از مدل‌های لیندلی (۱۹۸۰) و تایرنی و کادن (۱۹۸۶) بررسی می‌کنیم

$$R_t = \frac{1}{1 + e^{c(t-\mu)/\sigma}} \quad (2)$$

۲. برآورد بیزی R_T

هرگاه $x = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ یک نمونه تصادفی از [۱] باشد در اینصورت تابع لگ درستنمایی را می‌توان بصورت زیر نوشت

$$\mathbb{L} = \mathbb{L}(\mu, \sigma|x) = n \log\left(\frac{c}{\sigma}\right) - n \log \sigma - \sum_{i=1}^n \log(1 + \cosh \zeta_i). \quad (3)$$

که در آن $\zeta_i = c\left(\frac{x_i - \mu}{\sigma}\right)$.

در مواقعی که درخصوص پارامترها اطلاعات کمی در دست باشد، جفریز (۱۹۸۳)، استفاده از چگالی پیشین را مطرح می‌کند که تحت تبدیل‌های پارامتری، نامتغیر بوده و پیشین مبهم و یا غیر آگاهی‌دهنده نامیده می‌شود. این توزیع پیشین سودمند است به دلیل اینکه به نفع هیچ یک از مقادیر احتمالی پارامتر نسبت به دیگری نیست. در این مطالعه، ما توزیع پیشین مبهم $\frac{1}{\sigma} P(\mu, \sigma)$ را در نظر می‌گیریم. با ترکیب تابع درستنمایی و چگالی پیشین، چگالی پسین توأم μ و σ به صورت زیر است.

$$\pi(\mu, \sigma|x) \propto \sigma^{-(n+1)} \prod_{i=1}^n [1 + \cosh \zeta_i]^{-1} \quad (4)$$