

## مدول‌های متناهی تولید شده روی $D$ -کوهمولوژی موضعی و فانکتور $T_D(-)$

میرصادق سیدصادقی

مربی، هیات علمی گروه ریاضی، دانشگاه پیام نور، صندوق پستی ۱۹۳۹۵-۳۶۹۷، تهران، ایران

[msayedasadeghi@gmail.com](mailto:msayedasadeghi@gmail.com)

### چکیده

فرض کنیم  $A$  یک حلقه جابجایی و نوتری،  $M$  یک  $A$ -مدول و  $d$  یک عدد صحیح نامنفی باشد. در اینجا فانکتور  $T_d(M)$  را معرفی و ارتباط آن را با  $L_d(M)$  و  $H_d^i(M)$  بررسی می‌کنیم. همچنین قضایایی را در این خصوص آورده و برخی شرایط متناهی تولید شدن روی آنها را اثبات می‌کنیم.

واژگان کلیدی: انژکتیو؛ فانکتور؛ متناهی تولید شده.

Mathematics Subject Classification 2010: 13A30; 13A99; 13D45.

### ۱. پیش‌گفتار

در سراسر این مقاله، فرض می‌کنیم  $A$  یک حلقه جابجایی و نوتری،  $M$  یک  $A$ -مدول،  $d$  یک عدد صحیح نامنفی و  $\Sigma$  مجموعه تمام ایده‌آل‌هایی مانند  $\mathfrak{a}$  از  $A$  با ویژگی  $\dim(A/\mathfrak{a}) \leq d$  باشد. در این صورت فانکتور  $L_d(-)$  را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$L_d(M) = \varinjlim_{\mathfrak{a} \in \Sigma} \text{Hom}_A(A/\mathfrak{a}, M).$$

به وضوح  $L_d$  یک فانکتور همورد خطی دقیق چپ در کاتگوری  $A$ -مدول‌ها است و  $i$ -امین فانکتور مشتق شده راست آن را برای هر  $i \in \mathbb{N}_0$  به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$H_d^i(M) = \varinjlim_{\mathfrak{a} \in \Sigma} \text{Ext}_A^i(A/\mathfrak{a}, M)$$

که در آن  $H_d^0(M) = L_d(M)$ . در این مقاله، فانکتور دقیق و خطی  $T_d(-)$  را روی مدول  $M$  به صورت

$$T_d(M) = \varinjlim_{\mathfrak{a} \in \Sigma} \text{Hom}_A(\mathfrak{a}, M).$$

تعریف می‌کنیم و برخی ویژگی‌های آن را مطالعه می‌کنیم.

### ۲. نتایج اصلی

**تعریف ۱.۲.** فرض کنیم  $A$  یک حلقه جابجایی،  $M$  یک  $A$ -مدول و  $d$  یک عدد صحیح نامنفی باشد. به وضوح  $\{\text{Hom}_A(\mathfrak{a}, -), \varphi_{\mathfrak{b}}^{\mathfrak{a}}\}_{\mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{b}}$  یک دستگاه مستقیم است که در آن نگاشت  $\varphi_{\mathfrak{b}}^{\mathfrak{a}} : \text{Hom}_A(\mathfrak{b}, M) \rightarrow \text{Hom}_A(\mathfrak{a}, M)$  یک همریختی با ضابطه تعریف  $\varphi_{\mathfrak{b}}^{\mathfrak{a}}(f) = fi$  (نگاشت شمول است) است. بنابراین می‌توانیم فانکتور دقیق  $T_d(-)$  را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$T_d(M) = \varinjlim_{\mathfrak{a} \in \Sigma} \text{Hom}_A(\mathfrak{a}, M).$$

به وضوح  $T_d(-)$  یک فانکتور  $A$ -خطی و دقیق چپ است.

**لم ۲.۲.** فرض کنیم  $M$  یک  $A$ -مدول باشد. در این صورت دنباله

$$0 \rightarrow L_d(M) \rightarrow M \rightarrow T_d(M) \rightarrow H_d^1(M) \rightarrow 0$$

یک دنباله دقیق از  $A$ -مدول‌ها و  $A$ -همومورفیسم‌ها است. همچنین