

ترکیب خطی دوبتا و تعمیم بسط دوجمله‌ای

مینا قاسمی

دانشکده علوم ریاضی، دانشگاه تبریز، تبریز، ایران

mina.ghasemi15@yahoo.com

توحید بهرامی

گروه آمار، دانشگاه پیام نور، ایران

t.bahrani81@yahoo.com

چکیده

در این مقاله در ادامه بحث معدل وزنی، علاقمند شدیم نتیجه را به حالت کلی‌تر تعمیم دهیم. البته روش جدیدی را جایگزین تبدیل اشتیلیس کرده‌ایم. این روش در مقایسه با تبدیل اشتیلیس به نظر ساده‌تر است و همچنین یکی از قدیمی‌ترین و شاید معروفترین نتایج در ریاضیات که بسط دوجمله‌ای نیوتن است، تعمیم داده شده است.

واژگان کلیدی: تابع فوق هندسی گاوس؛ تبدیل اشتیلیس؛ توزیع نیم‌دایره تعمیم‌یافته؛ معدل وزنی تصادفی.

۱. پیش‌گفتار

توماس سلکه در سال ۱۹۸۳ از جمع متغیرهای تصادفی که دارای توزیع بتا باشند، صحبت نموده است. از نظر وی مجموع دو متغیر تصادفی (مستقل) بتا، هیچ‌وقت بتا نخواهد شد ولی اگر پارامترهای آن کوچکترین عدد صحیح مثبت باشند، به صورت تقریبی بتا خواهد شد. در برخی مقالاتی که در قسمت مراجع به آنها اشاره شده نیز ترکیب خطی بتا را با ضرایب غیرتصادفی مورد بررسی قرار داده‌اند و به جواب‌های قانع کننده‌ای نرسیده‌اند. در این مقاله ترکیب خطی بتا را با ضرایب وزنی در نظر گرفته‌ایم که خود این ضرایب وزنی، متغیر تصادفی هستند و توزیع این ترکیب خطی را بتا با مجموع پارامترها به دست آورده‌ایم.

ترکیب خطی دو متغیر تصادفی مستقل بتا با پارامترهای مختلف را به دو شکل تصادفی و غیرتصادفی در نظر می‌گیریم:

$$\begin{cases} T = aX + (1-a)Y \\ Z = WX + (1-W)Y \end{cases}$$

در اینجا a دارای مقدار ثابت $0 < a < 1$ است و W متغیر تصادفی بتا است. بررسی می‌کنیم در حالت دوم خاصیت پایایی نسبت به جمع دو متغیر تصادفی بتا برقرار است.

۲. نتایج اصلی

قضیه ۱.۲. فرض کنید Z معدل وزنی تصادفی باشد:

اگر متغیرهای تصادفی مستقل $X_i, i = 1, 2$ دارای توزیع $Beta(n_i, m_i)$ باشند و همچنین W دارای توزیع $Beta(n_1 + m_1, n_2 + m_2)$ باشد، آنگاه Z دارای توزیع $Beta(n_1 + n_2, m_1 + m_2)$ خواهد بود.

برهان. طبق فرض قضیه داریم:

$$Z = WX_1 + (1-W)X_2$$

طرفین معادله را به توان k می‌رسانیم؛

$$Z^k = (WX_1 + (1-W)X_2)^k$$

طبق بسط دوجمله‌ای نیوتن که عبارت است از

$$(a+b)^k = \sum_{i=0}^k \binom{k}{i} a^i b^{k-i}$$

داریم

$$Z^k = (WX_1 + (1-W)X_2)^k = \sum_{i=0}^k \binom{k}{i} (WX_1)^i ((1-W)X_2)^{k-i}$$