

فشرده سازی فضاهای توپولوژیک

محمد رضا رحیمی

گروه ریاضی، دانشگاه پیام نور، ایران

Rahimi13562002@gmail.com

چکیده

برای فضای موضعاً فشرده‌ی هاسدورف مانند X ، راه حل‌های مختلف فشرده‌سازی وجود دارد که در این نوشتار به بررسی دو تا از این فشرده‌سازی‌ها، یکی فشرده‌سازی تک نقطه‌ای، $\hat{X}$ و فشرده‌سازی استون-چنخ، $\beta(X)$ و شرایطی که تضمین می‌کنند $\hat{X} \neq \beta(X)$ خواهیم پرداخت. هم چنین مثال‌های جدیدی از فضاهای توپولوژیک که در آنها $\hat{X} = \beta(X)$ است ارائه خواهد شد.

واژگان کلیدی: فشرده‌سازی فضاهای توپولوژیک؛ فضاهای توپولوژیک؛ فضاهای فشرده.

۱. پیش‌گفتار

در ریاضیات و در شاخه توپولوژی عمومی، فشرده‌سازی (Compactification)، فرآیند و یا نتیجه تبدیل یک فضای توپولوژیک به یک فضای فشرده است. فضای فشرده، فضایی است که در آن هر دنباله نامتناهی از نقاط در فضا، به اندازه‌ی دلخواه، به حداقل یک نقطه در فضا نزدیک می‌شود.

هر دانش آموز حساب دیفرانسیل و انتگرال می‌داند که پیوستگی یک تابع حقیقی مقدار از یک متغیر حقیقی، تضمین کننده داشتن ماکسیمم و مینیمم منحصر به فردی روی یک مجموعه بسته و کراندار است. دانشجویان از توپولوژی و آنالیز یاد گرفته اند که توابع پیوسته رفتار بسیار ظریفانه‌ای بر روی مجموعه‌های فشرده دارند. اما زمانی که اولین بار با تعریف رسمی از مجموعه فشرده مواجه شدند، بعید است که درک جامعی برای این واقعیت و پاسخ به این سؤال داشته باشند: ”چه چیزی در مورد بسته و کراندار بودن زیر مجموعه‌های خط حقیقی وجود دارد که توابع پیوسته‌ای بر روی آنها می‌سازد که این چنین رفتار می‌کنند؟“

اگر یک فضای توپولوژیک فشرده نباشد، سؤالات طبیعی برای پرسش عبارتند از: چگونه ”بسته بودن“ موجب فشرده بودن، است؟ یا، آیا می‌توانیم چیزی به فضاهای بسته بیافزاییم تا از آن، فضایی فشرده بسازیم؟

اگر فضا، موضعاً فشرده و هاسدورف باشد؛ پاسخ به سؤال دوم، مثبت است. (به عنوان مثال به صفحه ۱۸۳، [۱]، نگاه کنید). به طور کلی، راه‌های مختلفی برای فشرده‌سازی یک فضای هاسدورف موضعاً فشرده، وجود دارد که در این مقاله، ما کوتاه‌ترین راه (فشرده‌سازی تک نقطه‌ای) X و طولانی‌ترین راه (فشرده‌سازی استون-چنخ) از X را، بررسی خواهیم کرد و مثال‌هایی از فضاهای توپولوژیک ارائه خواهیم کرد که این دو فشرده‌سازی، یکسان باشند و شرایطی که تضمین کننده تفاوت بودن این دو راه فشرده‌سازی باشند را نیز ارائه خواهیم کرد.

فشرده سازی فضای X

فضای فشرده هاسدورف Y ، فشرده شده‌ای از X است، اگر X یک زیرفضای Y باشد، به نحوی که X در Y ، چگال است. (یعنی $\bar{X} = Y$). دو فشرده شده Y_1 و Y_2 از X ، هم ارزند هرگاه نگاشت همئومورفسمی مثل $h: Y_1 \rightarrow Y_2$ ، چنان موجود باشد که به ازای هر $x \in X$ ، $h(x) = x$ ، آیا هر فضای هاسدورف موضعاً فشرده، فشرده شده‌ای دارد؟ پاسخ مثبت ما به این سؤال در بخش‌های دیگر، ارائه خواهد شد.

۲. فشرده‌سازی تک نقطه‌ای X

آسانترین و کوتاه‌ترین فشرده سازی یک فضای هاسدورف موضعاً فشرده، فشرده‌سازی تک نقطه‌ای است که با نماد $\hat{X}$ ، نشان داده می‌شود. $\hat{X}$ ، به شرح زیر ساخته شده است: فرض کنیم ∞ (که «نقطه بی‌نهایت» نامیده می‌شود) به مفهوم هر شیء بیرون از X و $\hat{X} = X \cup \{\infty\}$ باشد.

(به عبارتی، با الحاق این شیء به X ، مجموعه‌ی $\hat{X} = X \cup \{\infty\}$ ، را تشکیل می‌دهیم). با تعریف گردایه‌ای از انواع مجموعه‌های زیر، به عنوان مجموعه‌های باز در $\hat{X}$ ، در آن توپولوژی‌ای به شرح زیر، می‌سازیم:

۱- U ، که در آن U ، یکی از زیرمجموعه‌های باز X است.

۲- $\hat{X} - C$ ، که در آن C یکی از زیرمجموعه‌های باز X است.

در این صورت، $\hat{X}$ را با این توپولوژی؛ فشرده شده‌ی تک نقطه‌ای X ، می‌نامیم. این تعریف، یک توپولوژی روی X ، ارائه می‌دهد. چون؛ مجموعه‌ی تهی، مجموعه‌ای از نوع (۱) است. هم چنین، $\hat{X}$ ، مجموعه‌ای از نوع (۲) است. بررسی اینکه در تعریف آرایه شده‌ی فوق، مقطع دو مجموعه‌ی باز؛ مجموعه‌ای باز است، متضمن سه حالت زیر است:

الف) $U_1 \cap U_2$ از نوع (۱) است.

ب) $(\hat{X} - C_1) \cap (\hat{X} - C_2) = \hat{X} - (C_1 \cup C_2)$ از نوع (۲) است.