صفر-پایداری روش‌های GLMS

محمد جعفری
گروه ریاضی، دانشگاه پیام نور، ایران
m_ jafari@pnu.ac.ir

چکیده

روش‌های خطی عمومی (GLMs) روشی است برای حل عددی معادلات دیفرانسیل معمولی که می‌توان روش‌های مرسوم قبلی "روش‌های-رونگه کوتا" و "روش‌های چندگامی" را نیز در این قالب بیان کرد. بنابراین بجاست که همانند اغلب روش‌های عددی خاصیت صفر-پایداری آنها را در این مقاله مورد بحث و بررسی قرار دهیم.

واژگان کلیدی : روش‌های خطی عمومی؛ روش‌های رونگه-کوتا؛ صفر-پایداری.

Mathematics Subject Classification 2010: 65L05.

۱. روش‌های خطی عمومی

یک روش خطی عمومی برای حل عددی معادلات دیفرانسیل معمولی به فرم خودگردان به شکل

$$y' = f(y(x)), \qquad y(x) \in R^m, \qquad f:\ [a\ ,\ b] \times R^m \longrightarrow R^m \tag{1}$$

است که یک روش چندمقداری[1] و چندمرحله‌ای[2] است. یک روش خطی عمومی در هر گام r مقدار ورودی از مرحله قبلی و همین تعداد خروجی برای گام بعدی در نظر می‌گیرد. همچنین در نظر بگیرید تعداد مراحل داخلی برابر s باشد. مقادیر مراحل داخلی را با $Y_1^{[n]}, Y_2^{[n]}, \cdots, Y_s^{[n]}$ نشان می‌دهیم که در آن

$$Y_i^{[n]} \simeq y(x_{n-1} + c_i h), \qquad i = 1, 2, \cdots, s$$

و دارای مشتقات $f(Y_1^{[n]}), f(Y_2^{[n]}), \cdots, f(Y_s^{[n]})$ باشد. در شروع گام nام، r مقدار

$$y_1^{[n-1]}, y_2^{[n-1]}, \cdots, y_r^{[n-1]}$$

را مقادیر محاسبه شده در گام $n-1$ام فرض کنید. مقادیر متناظر

$$y_1^{[n]}, y_2^{[n]}, \cdots, y_r^{[n]}$$

در گام nام محاسبه می‌شوند. حال اگر h طول گام باشد، مقادیر ورودی و خروجی در گام nام با روابط زیر به یکدیگر مرتبط می‌شوند:

$$\begin{aligned} Y_i^{[n]} &= \textstyle\sum_{j=1}^{s} a_{ij} h f(Y_j^{[n]}) + \sum_{j=1}^{r} u_{ij} y_j^{[n-1]}, \qquad i = 1, 2, \cdots, s, \\ y_i^{[n]} &= \textstyle\sum_{j=1}^{s} b_{ij} h f(Y_j^{[n]}) + \sum_{j=1}^{r} v_{ij} y_j^{[n-1]}, \qquad i = 1, 2, \cdots, r. \end{aligned} \tag{2}$$

که در آن

$$Y = \begin{bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ \vdots \\ Y_s \end{bmatrix}, f(Y^{[n]}) = \begin{bmatrix} f(Y_1^{[n]}) \\ f(Y_2^{[n]}) \\ \vdots \\ f(Y_s^{[n]}) \end{bmatrix}, y^{[n-1]} = \begin{bmatrix} y_1^{[n-1]} \\ y_2^{[n-1]} \\ \vdots \\ y_r^{[n-1]} \end{bmatrix}, y^{[n]} = \begin{bmatrix} y_1^{[n]} \\ y_2^{[n]} \\ \vdots \\ y_r^{[n]} \end{bmatrix}.$$

در نتیجه می‌توان نوشت:

$$\begin{aligned} Y^{[n]} &= hAf(Y^{[n]}) + Uy^{[n-1]}, \\ y^{[n]} &= hBf(Y^{[n]}) + Vy^{[n-1]}. \end{aligned}$$

روش‌های خطی عمومی با چهار ماتریس A، U، B و V مشخص می‌شوند و معمولا به صورت (A, U, B, V) نشان داده می‌شوند.

[1] Multivalue
[2] Multistage