

گراف مقسوم علیه صفر جبر ادغامی یک حلقه در طول یک ایده آل

اکرم محمودی

گروه ریاضی، دانشگاه پیام نور، ایران
akmahmoodi@yahoo.com

رعنا صفراپی

گروه ریاضی، دانشگاه پیام نور، ایران
r.safraie@gmail.com

لیلا کرمی

گروه ریاضی، دانشگاه پیام نور، ایران
Leilakarami704@gmail.com

چکیده

در این مقاله مفهوم گراف مقسوم علیه صفر روی جبر ادغامی یک حلقه در طول یک ایده آل را مطرح کرده و خواص اساسی این گراف من جمله همبندی، کمر و قطر آن را مورد مطالعه قرار می دهیم.

واژگان کلیدی: جبر ادغامی یک حلقه در طول یک ایده آل؛ گراف مقسوم علیه صفر.

Mathematics Subject Classification 2010: 05C69; 05C25.

۱. پیش گفتار

مفهوم گراف مقسوم علیه صفر روی حلقه R نخستین بار توسط بک [۴] در سال ۱۹۸۸ معرفی و به عنوان ابزاری توانمند در بسیاری از شاخه های ریاضیات مورد استفاده قرار گرفت. کارهای زیادی در این زمینه انجام شده است. می توان به [۲]، [۱] و [۴] مراجعه کرد. فرض کنید R یک حلقه جابجایی و $Z(R)$ مجموعه مقسوم علیه های صفر آن باشد. گراف مقسوم علیه صفر که با نماد $\Gamma(R)$ نشان داده می شود گرافی با مجموعه رئوس $\{0\} \cup Z(R)$ است و دو رأس x و y به هم وصل می شوند هرگاه $xy = 0$. در این مقاله گراف های مقسوم علیه صفر جبر ادغامی یک حلقه در طول یک ایده آل مورد مطالعه قرار می گیرد که با نماد اختصاری $\Gamma(R \bowtie I)$ نمایش داده می شود.

تعریف ۱.۱. فرض کنید G یک گراف باشد. قطر گراف G که با نماد $\text{diam}(G)$ نمایش داده می شود، به صورت زیر تعریف می شود:
$$\text{diam}(G) = \sup\{d(u, v) | u, v \in V(G)\}.$$

در صورتی که سوپریمم فوق موجود نباشد قرار می دهیم:

$$\text{diam}(G) = \infty.$$

تعریف ۲.۱. طول کوتاه ترین دور در گراف G را کمر آن گویند و با نماد $\text{girth}(G)$ نمایش می دهند.

۲. نتایج اصلی

مفهوم ایده آل ساز یک حلقه توسط ناگاتا در سال ۱۹۵۶ به صورت زیر معرفی شد [۵].

تعریف ۱.۲. فرض کنید R یک حلقه و M یک R -مدول باشد. ایده آل ساز M روی R که با نماد $R(+)M$ نمایش داده می شود با جمع و ضرب

$$(r_1, m_1) + (r_2, m_2) = (r_1 + r_2, m_1 + m_2)$$

$$(r_1, m_1)(r_2, m_2) = (r_1 r_2, r_1 m_2 + r_2 m_1)$$

یک حلقه است.

در ادامه مفهوم گراف مقسوم علیه صفر روی این حلقه مورد مطالعه قرار گرفت [۲]. خواص اساسی این گراف به فرم زیر است.