

مدول پروژکتیو و مجموعه‌ی زیرمدول‌های اول وابسته‌ی آن

معصومه حسن‌زاد

گروه ریاضی، دانشگاه پیام نور، ایران

hassanzad.m@uma.ac.ir

توحید بهرامی

گروه آمار، دانشگاه پیام نور، ایران

t_bahrami81@yahoo.com

چکیده

فرض کنید R یک حلقه‌ی جابجایی یکدار و M یک R -مدول پروژکتیو باشد. برای ایده‌آل اول P از حلقه، زیرمدول $M(P)$ و رادیکال آن در M را مشخص می‌کنیم. همچنین، مجموعه زیرمدول‌های اول وابسته‌ی مدول M را معرفی می‌کنیم.

واژگان کلیدی: خاصیت اول؛ رادیکال زیرمدول؛ زیرمدول اول؛ مجموعه زیرمدول‌های اول وابسته.

۱. پیش‌گفتار

در سال‌های اخیر تحقیقات گسترده‌ای در زمینه‌ی زیرمدول‌های اول انجام گرفته است. بسیاری از مطالب و قضایای مهم مربوط به ایده‌آل‌های اول، برای زیرمدول‌های اول نیز تعمیم داده شده‌اند. فرض کنید R یک حلقه‌ی جابجایی یکدار و M یک R -مدول باشد. زیرمدول واقعی N از M را P -اول نامیم هرگاه به ازای $r \in R$ و $m \in M$ ، از $rm \in N$ نتیجه شود $m \in N$ یا $m \in N$ ؛ با همین مفروضات، چنانچه $m \in N$ یا $m \in \sqrt{(N:M)} = P$ ، $r \in \sqrt{(N:M)}$ ، آنگاه گوییم N یک زیرمدول P -اولیه است. براساس [۲] و [۴] مجموعه‌ی $M(P)$ را برای هر ایده‌آل اول P از R و R -مدول M به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$M(P) = \{m \in M \mid sm \in PM \text{ for some } s \in R \setminus P\}.$$

همچنین، برای هر زیرمدول N از M ، رادیکال N در M را اشتراک همه‌ی زیرمدول‌های اول M که شامل N هستند، تعریف کرده و با نماد $M - rad_R N$ نشان می‌دهیم. بر این اساس، اشتراک همه‌ی زیرمدول‌های اول M را بصورت $M - rad_R 0$ معرفی می‌کنیم. اگر هیچ زیرمدول اول شامل N موجود نباشد، آنگاه قرار می‌دهیم $M - rad_R N = M$. رادیکال زیرمدول‌ها یکی از موضوعات مهم مورد مطالعه است. (برای نمونه به [۲] و [۴] نگاه کنید).

۲. نتایج اصلی

لم ۱.۲. فرض کنید F یک R -مدول آزاد و I یک ایده‌آل P -اولیه از R باشد. در این صورت IF یک زیرمدول P -اولیه از F است.

□

برهان. به [۱، لم ۱.۲] نگاه کنید.

قضیه ۲.۲. فرض کنید M یک R -مدول پروژکتیو باشد. به ازای هر ایده‌آل P -اولیه‌ی I از حلقه‌ی R ، $IM = M$ یا IM زیرمدول P -اولیه‌ی M می‌باشد.

برهان. فرض کنیم M یک R -مدول پروژکتیو باشد. پس $F = M \oplus A$ که در آن F مدول آزاد و A یک R -مدول است. فرض کنیم $\{f_i = m_i + a_i\}_{i \in I}$ پایه‌ای برای F باشد به طوری که $m_i \in M$ و $a_i \in A$. همچنین، فرض کنیم به ازای ایده‌آل P -اولیه‌ی I از R داشته باشیم $IM \neq M$. ابتدا نشان می‌دهیم $\sqrt{(IM:M)} = P$. عضو غیرصفر $r \in \sqrt{(IM:M)}$ را در نظر می‌گیریم که در P قرار ندارد. حال، عدد صحیح n وجود دارد به طوری که $r^n M \leq IM \leq IF$. بنا به لم قبل خواهیم داشت $M \leq IF$. فرض کنیم $m \in M$. بنابراین $m = \sum r_i f_i$ که در آن $r_i \in I$. در این صورت $m = \sum r_i a_i \in M \cap A = 0$ و $m - \sum r_i m_i = \sum r_i a_i \in M \cap A = 0$ و لذا $m \in IM$. این نتیجه می‌دهد $IM = M$ که یک تناقض است. حال، فرض می‌کنیم $r \in R$ و $m \in M$ به طوری که $rm \in IM$ و $r \notin P$. لذا $m \in IF$ و در نتیجه $m \in IM$. برهان کامل می‌شود. □

نتیجه ۳.۲. فرض کنید M یک R -مدول پروژکتیو و P یک ایده‌آل اول R باشد. عبارات زیر معادلند:

۱. PM زیرمدول اول M است؛

۲. زیرمدول اول U از M وجود دارد که $P = (U:M)$ ؛

۳. $(PM:M) = P$.