

توابع توزیع، چگالی و گشتاور آماره‌های ترتیبی توزیع بتا-پارتو

رقیه ماکویی

دانشکده پزشکی- دانشگاه علوم پزشکی تبریز

rmakuyi@yahoo.com

حسین جباری خامنه‌ای

گروه آمار- دانشگاه تبریز

H-jabbari@tabrizu.ac.ir

چکیده

در این مقاله توزیع بتا-پارتو چهار پارامتری تعریف و مورد مطالعه قرار می‌گیرد. توابع توزیع و چگالی برای این توزیع به دو صورت محاسبه می‌گردد. توزیع i -امین آماره‌ی ترتیبی و گشتاور i -امین آماره‌ی ترتیبی مورد بررسی قرار می‌گیرد.

واژگان کلیدی: آماره‌های ترتیبی؛ توزیع بتا-پارتو؛ گشتاور مرتبه i -ام.

۱. پیش‌گفتار

توزیع‌های آماری به عنوان ابزاری مهم در تجزیه و تحلیل داده‌ها از دیرباز مورد استفاده محققین بوده است. دلیل این امر این است که با شناسایی مدل مناسب داده‌ها، استنباط‌های مربوط به داده‌ها، قابل انجام است. در شناسایی مدل مناسب، توزیع‌های با قابلیت انعطاف بالا، مورد استفاده قرار می‌گیرند. توزیع‌های تعمیم یافته به عنوان خانواده‌ای از توزیع‌هایی که انعطاف‌پذیری بالایی دارند از اهمیت ویژه‌ای برخوردارند. مطالعه‌ی تحقیقات گذشته نشان می‌دهد که خانواده‌ی توزیع‌های پارتو قابلیت بالایی در مدل‌سازی توزیع‌های دم‌سنگین دارد. این گونه توزیع‌ها بیشتر در داده‌های مربوط به درآمد، جمعیت شهری، اندازه‌ی شرکت‌ها و کاربرد دارند. با توجه به اینکه در زمینه‌های مهم و مختلفی توزیع‌های با رفتار دم سنگین کاربرد پیدا می‌کند، بررسی اینگونه توزیع‌های تعمیم یافته ضرورت می‌یابد.

۲. معرفی صورت کلی توزیع‌های تعمیم یافته

اگر X یک متغیر تصادفی با تابع توزیع $G(x)$ باشد، تابع توزیع برای حالت تعمیم یافته‌ی متغیر تصادفی X به صورت زیر بیان می‌شود.

$$F(x) = \frac{1}{B(\alpha, \beta)} \int_0^{G(x)} t^{\alpha-1} (1-t)^{\beta-1} dt \quad (1)$$

تابع چگالی مربوط به (۱) از رابطه‌ی زیر قابل محاسبه است.

$$f(x) = \frac{1}{B(\alpha, \beta)} [G(x)]^{\alpha-1} [1 - G(x)]^{\beta-1} G'(x) \quad \alpha > 0, \beta < \infty \quad (2)$$

نویسندگان مختلف چگالی بیان شده در رابطه (۲) را با فرض‌های $G(x)$ مختلف بررسی و مورد مطالعه قرار داده‌اند. در این مقاله $G(x)$ را معادل تابع توزیع پارتو فرض نموده و به کمک صورت تعمیم یافته‌ی بیان شده در معادله‌ی (۱)، به تعریف توزیع بتا-پارتو خواهیم پرداخت.

۳. توابع چگالی و توزیع بتا-پارتو

روش اول: گویم متغیر تصادفی X دارای توزیع پارتو می‌باشد اگر توابع توزیع و چگالی آن به ترتیب بصورت (۳) و (۴) باشد.

$$G(x) = 1 - \left(\frac{x}{\theta}\right)^{-k} \quad (3)$$

$$g(x) = \frac{k\theta^k}{x^{k+1}}, \quad \theta, k > 0, x \geq \theta. \quad (4)$$

به کمک رابطه‌ی (۲)، تابع چگالی برای توزیع بتا-پارتو به صورت زیر خواهد بود [۱]:

$$f(x) = \frac{k}{\theta B(\alpha, \beta)} 1 - \left(\frac{x}{\theta}\right)^{-k\alpha-1} \left(\frac{x}{\theta}\right)^{-k\beta-1} \quad \alpha, \beta, \theta, k > 0 \quad \& \quad x \geq \theta. \quad (5)$$