

نقش جبر در ریاضیات

علیرضا نجفی زاده

استادیار، گروه ریاضی، دانشگاه پیام نور، صندوق پستی ۳۶۹۷-۱۹۳۹۵ تهران، ایران

ar_najafizadeh@yahoo.com

چکیده

این مقاله به رابطه بین علم جبر با دیگر شاخه‌های مختلف علم ریاضی از دیدگاه‌های متعدد پرداخته است. در واقع با ارایه مثال‌هایی در مدل‌بندی هندسی، به عملکرد مدول‌ها و قاعده کرامر در آن‌ها می‌پردازیم.

واژگان کلیدی: جبر؛ قاعده کرامر؛ مدول.

Mathematics Subject Classification 2010: 68Q99.

۱. پیش‌گفتار

امروزه نقش جبر در علم ریاضیات به عنوان یک ابزار قوی و مهم برای توصیف نحوه عملکرد اشیاء برای همگان مشخص و معلوم شده است. همان‌طور که می‌دانیم در علم جبر رفتار و عمل یک شیء مهم می‌باشد و نه خود آن. کاربردهای این علم در سایر شاخه‌های ریاضی روز به روز در حال افزایش است. به ویژه در دهه‌های اخیر کاربرد هندسه جبری و جبر جابجایی در حل مسایل مدل‌بندی هندسی کاملاً چشم‌گیر است. در این مقاله به رابطه بین علم جبر و ریاضیات از دیدگاه‌های مختلف پرداخته‌ایم. در واقع با ارایه مثال‌هایی در مدل‌بندی هندسی، به عملکرد مدول‌ها و قاعده کرامر در آن‌ها می‌پردازیم.

۲. نتایج اصلی

اولین مثال در این بخش شامل کاربرد قانون کرامر و قضیه هیلبرت-بورچ در تعیین ساختار برخی تحلیل‌های آزاد می‌باشد. قانون کرامر یک قانون شناخته شده و به عنوان یک مفهوم دارای سابقه طولانی در ریاضیات می‌باشد. مفهوم تحلیل آزاد مفهومی مجرد و از مفاهیم اساسی و جدید در جبر مجرد می‌باشد. همان‌طور که خواهیم دید این مفاهیم به طور طبیعی در مدل‌بندی هندسی ظاهر می‌شوند. اولین مثال در این مورد با تحقیق تام سدربرگ و فالای چن [۳] در مورد منحنی‌های پارامتری در صفحه شروع می‌شود. فرض کنیم چندجمله‌ای‌های $a(t)$ ، $b(t)$ ، $c(t)$ دو به دو نسبت به هم اول و از درجه n باشند. در این صورت معادلات پارامتری:

$$x = \frac{a(t)}{c(t)}, \quad y = \frac{b(t)}{c(t)} \quad (1)$$

یک منحنی را در صفحه توصیف می‌کنند. از نقطه نظر هندسی سدربرگ و چن در [۳] خطوط را به شکل زیر در نظر می‌گیرند:

$$A(t)x + B(t)y + C(t) = 0, \quad (2)$$

که در آن $A(t)$ ، $B(t)$ و $C(t)$ چندجمله‌ای‌هایی از پارامتر t هستند. اگر پارامتر t تغییر کند، آنگاه خط مفروض نیز تغییر می‌کند و لذا آن را خط متحرک می‌نامیم. یک خط را قابل پارامتری شدن گویند هرگاه با تغییر پارامتر t ، نقاط متناظر روی خط مفروض قرار گیرند. به عبارت دیگر (۱) یک جواب برای معادله (۲) برای تمام مقادیر t می‌باشد. حال با جای‌گذاری این روابط و حذف مخرج کسرها به معادله زیر می‌رسیم:

$$A(t)a(t) + B(t)b(t) + C(t)c(t) \equiv 0, \quad (3)$$

که در آن علامت $\equiv$ به معنی برقرار بودن روابط برای تمام مقادیر t است. در واقع چندجمله‌ای:

$$A(t)a(t) + B(t)b(t) + C(t)c(t)$$

چندجمله‌ای صفر است. سوال اساسی در اینجا این است که چه نوع ساختارهای جبری در این مثال استفاده می‌شود؟ توجه می‌کنیم که چون حوزه بحث روی اعداد حقیقی $\mathbb{R}$ است، لذا حلقه مورد بحث $R = \mathbb{R}[t]$ می‌باشد. بنابراین خطوط متحرک $A(t)x + B(t)y + C(t) = 0$ ناشی از (۱) متناظر با اعضای مجموعه:

$$\{(A(t), B(t), C(t)) \in \mathbb{R}^3 : A(t)a(t) + B(t)b(t) + C(t)c(t) \equiv 0\} \quad (4)$$

می‌باشد. این مجموعه یک R -زیرمدول از مدول آزاد R^3 می‌باشد. در جبر جابجایی معادله (۳) را یک جفت و معادله (۴) را یک مدول جفت گویند. لازم به ذکر است که کلمه جفت در ستاره‌شناسی به مسیر سه جرم آسمانی اطلاق می‌شود که در یک راستا یا تقریباً یک راستا قرار دارند. این کلمه برای اولین بار در سال ۱۸۵۳ توسط سیلواستر [۴] در