

گروه‌های ۴-انگل دومولدی

معصومه خاصه

گروه ریاضی، دانشگاه گنبد کاووس، گنبد کاووس، ایران، صندوق پستی ۱۶۳
masoumeh_khaseh@yahoo.com

حسن خسروی

گروه ریاضی، دانشگاه گنبد کاووس، گنبد کاووس، ایران، صندوق پستی ۱۶۳
hassan_khosravy@yahoo.com

عبدالناصر بهلکه

گروه ریاضی، دانشگاه گنبد کاووس، گنبد کاووس، ایران، صندوق پستی ۱۶۳
n.bahlekeh@yahoo.com

آنه گلدی مهمیانی

گروه ریاضی، دانشگاه گنبد کاووس، گنبد کاووس، ایران، صندوق پستی ۱۶۳
mahmiani_a@yahoo.com

چکیده

می‌دانیم که هر گروه پوچ توان از رده‌ی حداکثر n یک گروه n -انگل است اما در حالت کلی عکس این مطلب برقرار نمی‌باشد. البته این مطلب که گروه‌های n -انگل پوچ توان موضعی هستند به صورت یک سوال باز مطرح است. طبق مقاله‌های ارائه شده گروه‌های ۲-انگل پوچ توان و ۳-انگل پوچ توان موضعی می‌باشند. اما آنچه که در این مقاله مطالعه می‌شود، اثبات پوچ توانی گروه‌های ۴-انگل دومولدی در راستای پاسخ به سوال فوق می‌باشد.

واژگان کلیدی: پوچ توانی موضعی؛ رادیکال هرش پلاتکین؛ گروه انگل.

۱. پیش‌گفتار

فرض کنید G یک گروه دلخواه باشد. در این صورت برای زوج (a, b) از عناصر G جابجاگر n -انگل $[a, n, b]$ را به صورت استقرایی زیر تعریف می‌کنیم: برای هر $n > 0$

$$[a, 0, b] = a, [a, 1, b] = [a, 1, b] = a^{-1}b^{-1}ab, [a, n, b] = [[a, n-1, b], b].$$

در واقع منشا گروه‌های انگل به نظریه جبرهای لی باز می‌گردد. این مطلب جالب است که تعدادی از نتایج در نظریه‌های جبر لی انگل دارای مشابه‌هایی در نظریه گروه‌های انگل هستند. به عنوان مثال "هر جبر لی با بعد متناهی روی یک میدان پوچ توان است" و معادل آن در نظریه گروه‌ها که توسط زرن به اثبات رسید عبارت است از "هر گروه انگل متناهی پوچ توان است".

نتایج بسیاری درباره‌ی گروه‌های ۴-انگل به دست آمده است که برخی را با توجه به اهمیت کاربرد آن‌ها در این مقاله بیان می‌کنیم:

در سال ۲۰۰۳ تراستاسون ثابت کرد که در یک گروه ۴-انگل بدون عضوهای از مرتبه ۲ یا ۵، بستار نرمال هر عضو آن پوچ توان از رده‌ی حداکثر ۳ است. همچنین او در سال ۱۹۹۹ نشان داد که اگر یک گروه ۴-انگل هیچ عضوی از مرتبه‌ی ۲، ۳ یا ۵ نداشته باشد پوچ توان از رده‌ی حداکثر ۷ است. او در [۱] نشان داد که همه گروه‌های ۴-انگل فارغ از تاب پوچ توان و p -گروه‌های ۴-انگل برای هر عدد اول دلخواه p به طور موضعی متناهی هستند.

این نتایج و سایر نتایج به دست آمده‌ی دیگر منجر به اثبات پوچ توانی موضعی گروه‌های ۴-انگل توسط هاواس و واگن‌لی در سال ۲۰۰۵ شد. اگر چه اثبات آنها بر مبنای نرم-افزارهای ریاضی بود ولی در همان سال تراستاسون تمامی محاسبات را بر روی برگه آورد.

اما آنچه در این مقاله به آن پرداخته شده است کاهش مساله پوچ توانی موضعی گروه‌های ۴-انگل به پوچ توانی گروه‌های ۴-انگل دومولدی می‌باشد.

۲. نتایج اصلی

تعریف ۱.۲. رادیکال هرش پلاتکین گروه G بزرگترین زیرگروه نرمال به طور موضعی پوچ توان آن می‌باشد.