

تابعگونی های توسیع و تابی مدول های کوهمولوژی موضعی و متناهی مولد بودن آنها

علیرضا وحیدی

گروه ریاضی، دانشگاه پیام نور، ایران

vahidi.ar@pnu.ac.ir

داور حضوری

گروه ریاضی، دانشگاه پیام نور، ایران

davarhoozuri@yahoo.com

چکیده

فرض کنیم R یک حلقه جابجایی یکدار نوتری ناصفر، a و b ایده‌آلهایی از حلقه R با شرط $a \subseteq b$ و M یک R -مدول متناهی مولد با بعد کرول متناهی باشد. در این مقاله، برای اعداد صحیح s و t ، متناهی مولد بودن $\text{Ext}_R^s(\frac{R}{b}, H_a^t(M))$ و $\text{Tor}_s^R(\frac{R}{b}, H_a^t(M))$ را در حالات مختلف مورد بررسی قرار می‌دهیم.

واژگان کلیدی: تابعگونی های تابی؛ تابعگونی های توسیع؛ مدول های کوهمولوژی موضعی.

Mathematics Subject Classification 2010: 13D07; 13D45.

۱. پیش‌گفتار

فرض کنیم R یک حلقه جابجایی یکدار نوتری ناصفر، a و b ایده‌آلهایی از حلقه R با شرط $a \subseteq b$ و X یک R -مدول دلخواه، M یک R -مدول متناهی مولد و s, t اعدادی صحیح و نامنفی باشند. گروتندیک، در مرجع [۶]، مفهوم مدول کوهمولوژی موضعی $H_a^t(X)$ را معرفی و برخی از خواص اولیه آن را به دست آورد. به عنوان مثال، ثابت نمود که روی حلقه موضعی (R, m) ، مدول $H_m^t(M)$ آرتینی است. این نتیجه نشان می‌دهد که مدول $\text{Hom}_R(\frac{R}{m}, H_m^t(M))$ متناهی مولد است. با توجه به این مطلب، گروتندیک در مرجع [۷] پرسید که آیا با تعویض ایده‌آل ماکسیمال m با یک ایده‌آل دلخواه a ، نتیجه همچنان برقرار خواهد ماند؟ هارتشورن با ارائه مثالی در مرجع [۸] نشان داد که مطلب فوق حتی برای حلقه‌های موضعی منظم برقرار نیست. هارتشورن پرسش گروتندیک را به صورت زیر مطرح کرد.

پرسش هارتشورن: برای کدام ایده‌آل a و کدام R -مدول متناهی مولد M ، مدول $\text{Ext}_R^t(\frac{R}{a}, H_a^j(M))$ ، به ازای هر $i \geq 0$ و هر $j \geq 0$ ، متناهی مولد است؟

دلفینو و مارلی در مرجع [۳] و ملکرسون در مرجع [۹] نشان دادند که اگر a ایده‌آلی اصلی باشد یا $\dim(R/a) = 1$ ، آنگاه به ازای هر $i \geq 0$ و هر $j \geq 0$ ، R -مدول های $\text{Ext}_R^t(\frac{R}{a}, H_a^j(M))$ و $\text{Tor}_s^R(\frac{R}{a}, H_a^j(M))$ متناهی مولدند. تلاش‌های زیادی برای یافتن شرایطی که متناهی مولد بودن مدول های $\text{Ext}_R^s(\frac{R}{a}, H_a^t(M))$ و $\text{Tor}_s^R(\frac{R}{a}, H_a^t(M))$ را نتیجه دهد انجام گرفته است. برای نمونه قضیه ۳.۳ از مرجع [۱]، قضیه ۱.۳ از مرجع [۲]، قضیه ۹.۳.۶ از مرجع [۴] و قضایای اول و دوم از مرجع [۵] را مشاهده نمایید. در این مقاله، متناهی مولد بودن مدول های $\text{Ext}_R^s(\frac{R}{b}, H_a^t(M))$ و $\text{Tor}_s^R(\frac{R}{b}, H_a^t(M))$ را در برخی حالات مورد مطالعه قرار می‌دهیم. در بخش دوم، به مطالعه متناهی مولد بودن تابعگونی های توسیع مدول های کوهمولوژی موضعی پرداخته و در قضیه ۱.۲ نشان می‌دهیم که برای R -مدول متناهی مولد و با بعد متناهی M ، مدول $\text{Ext}_R^s(\frac{R}{b}, H_a^t(M))$ متناهی مولد است هرگاه:

- به ازای هر $0 \leq i \leq t-1$ ، مدول $\text{Ext}_R^{s+t+1-i}(\frac{R}{b}, H_a^i(M))$ متناهی مولد باشد؛
 - به ازای هر $t+1 \leq i \leq \dim_R(M)$ ، مدول $\text{Ext}_R^{s+t-1-i}(\frac{R}{b}, H_a^i(M))$ متناهی مولد باشد.
- در بخش سوم، متناهی مولد بودن تابعگونی های تابی مدول های کوهمولوژی موضعی را مورد مطالعه قرار داده و در قضیه ۱.۳ نشان می‌دهیم که برای R -مدول متناهی مولد و با بعد متناهی M ، مدول $\text{Tor}_s^R(\frac{R}{b}, H_a^t(M))$ متناهی مولد است هرگاه:
- به ازای هر $0 \leq i \leq t-1$ ، مدول $\text{Tor}_{s-t-1+i}^R(\frac{R}{b}, H_a^i(M))$ متناهی مولد باشد؛
 - به ازای هر $t+1 \leq i \leq \dim_R(M)$ ، مدول $\text{Tor}_{s-t+1+i}^R(\frac{R}{b}, H_a^i(M))$ متناهی مولد باشد.

۲. تابعگونی های توسیع مدول های کوهمولوژی موضعی

در این بخش، شرایط کافی برای متناهی مولد بودن R -مدول $\text{Ext}_R^s(\frac{R}{b}, H_a^t(M))$ را پیدا کرده و نتایجی در مورد متناهی مولد بودن تابعگونی های توسیع مدول های کوهمولوژی موضعی به دست می‌آوریم.