

بررسی مدول‌های دوم روی حلقه‌های غیرجابجایی

محمدحسن حافظی (دبیر آموزش و پرورش)

گروه ریاضی، واحد تبریز، دانشگاه آزاد اسلامی، تبریز، ایران

m.h.hafazi@chmail.ir

چکیده

در این مقاله به خواص جالبی از مدول‌های دوم که نقش مهمی در بررسی و ساختار مدول‌ها ایفا می‌کنند می‌پردازیم و همچنین ارتباط مدول‌های دوم را با مدول‌های اول بیان و بررسی می‌کنیم.

واژگان کلیدی: بعد پوچ؛ حلقه‌های موضعی؛ مدول دوم.

Mathematics Subject Classification 2010: 16D10; 16N60; 16L30.

۱. پیش‌گفتار

اولین بار دانش در مقالات خود به سال‌های ۱۹۷۸ و ۱۹۸۰ مدول‌های اول و زیرمدول‌های اول را در [۳، ۴] معرفی و مورد مطالعه قرار داده است. بعد از دانش این مقوله توسط ریاضیدانان متعددی مورد بررسی قرار گرفت. همچنین مدول‌های دوم و زیرمدول‌های دوم اخیراً توسط یاسمی در [۵] و آنین در [۲] مورد بررسی و مطالعه قرار گرفته است. سپس در سال ۲۰۱۳ آلکان و اسمیت در [۱] مدول‌های دوم را روی حلقه‌های غیرجابجایی مورد بررسی قرار دادند. در این مقاله R یک حلقه دلخواه و M یک R -مدول راست یکانی است. در سراسر این مقاله تمام حلقه‌ها شرکت‌پذیر و یک‌دار هستند.

۲. نتایج اصلی

تعریف ۱.۲. فرض کنید R یک حلقه باشد. R -مدول راست M را اول گویند هرگاه $M \neq 0$ و به ازای هر زیرمدول ناصفر N از M داشته باشیم $ann_R(M) = ann_R(N)$.

تعریف ۲.۲. فرض کنید R یک حلقه باشد. R -مدول راست M را دوم گویند هرگاه $M \neq 0$ و به ازای هر زیرمدول سره N از M داشته باشیم $ann_R(M) = ann_R(\frac{M}{N})$. R -مدول دوم را R -مدول هم‌اول نیز می‌نامند.

تعریف ۳.۲. فرض کنید S یک زیرمدول از R -مدول M باشد. یک زیرمدول از M مانند C را متمم S در M می‌نامیم هرگاه C نسبت به خاصیت $C \cap S = 0$ ماکزیمال باشد.

تعریف ۴.۲. حلقه R را یک حلقه گلدی^۱ گویند هرگاه زیرمدول‌های متمم و پوچ‌ساز آن در R در شرط $a.c.c$ صدق کنند.

تعریف ۵.۲. حلقه R را موضعی گویند هرگاه فقط و فقط یک ایده‌آل ماکزیمال داشته باشد.

مثال ۶.۲. تنها ایده‌آل ماکزیمال حلقه $\mathbb{Z}_4$ ، $\{2\}$ است پس $\mathbb{Z}_4$ موضعی است.

تعریف ۷.۲. فرض کنید R یک حلقه و M یک R -مدول و N_i ($i \in I$) یک خانواده از زیرمدول‌های ناصفر M باشد. N_i را هم-مستقل گویند هرگاه برای هر $j \in I$ و هر زیرمجموعه متناهی $F \subseteq I$ یا $F \subseteq \{j\}$ داشته باشیم $N_i + \bigcap_{i \in F} N_i = M$. به عبارت دیگر N_i ($i \in I$) هم-مستقل است اگر و تنها اگر هر زیرخانواده متناهی آن هم-مستقل باشد.

تعریف ۸.۲. R -مدول راست M را پوچ گویند هرگاه $M \neq 0$ و جمع دو زیرمدول سره M برابر خودش نباشد.

تعریف ۹.۲. R -مدول راست M را بخش‌پذیر گویند هرگاه به ازای هر $x \in M$ و $r \in R$ که مقسوم علیه صفر نباشد، $y \in M$ وجود داشته باشد به طوری که $ry = x$.

قضیه ۱۰.۲. فرض کنید R یک حلقه دلخواه، M یک R -مدول راست یکانی و P ایده‌آل اول از حلقه R باشد به طوری که $\frac{R}{P}$ یک حلقه گلدی کراندار چپ باشد. در این صورت R -مدول راست M یک مدول دوم است اگر و تنها اگر $Q = ann(M)$ ایده‌آلی از R باشد و M یک $\frac{R}{Q}$ -مدول راست بخش‌پذیر باشد.

^۱Goldie