

جبر در معادلات دیفرانسیل و سیستم‌های دینامیکی

علیرضا نجفی‌زاده

استادیار، گروه ریاضی، دانشگاه پیام نور، صندوق پستی ۳۶۹۷-۱۹۳۹۵ تهران، ایران
ar_najafizadeh@yahoo.com

چکیده

این مقاله مروری بر برخی از کاربردهای علم جبر در معادلات دیفرانسیل و سیستم‌های دینامیکی از طریق معرفی مراجع مناسب داشته و اطلاعات دقیق‌تر و جزئیات را به منابع مذکور ارجاع می‌دهد.

واژگان کلیدی: جبر؛ حل؛ معادلات دیفرانسیل.

Mathematics Subject Classification 2010: 68Q99.

۱. پیش‌گفتار

امروزه نقش جبر در علم ریاضیات به عنوان یک ابزار قوی و مهم برای توصیف نحوه عملکرد اشیاء برای همگان مشخص و معلوم شده است. همان‌طور که می‌دانیم در علم جبر رفتار و عمل یک شیء مهم می‌باشد و نه خود آن. کاربردهای این علم در سایر شاخه‌های ریاضی روز به روز در حال افزایش است. به ویژه در دهه‌های اخیر کاربرد هندسه جبری و جبر جابجایی در حل مسایل مدل‌بندی هندسی کاملاً چشم‌گیر است. در این مقاله به رابطه بین علم جبر و ریاضیات از دیدگاه‌های مختلف پرداخته‌ایم. در واقع با آرایه مثال‌هایی در مدل‌بندی هندسی، به عملکرد مدول‌ها و قاعده کرامر در آنها می‌پردازیم.

۲. معادلات دیفرانسیل

اغلب سیستم‌های جبر محاسباتی می‌توانند معادلات دیفرانسیل را حل کنند. همان‌طور که زولینگر در [۲۰] به تفصیل شرح داده است، با استفاده از برخی تکنیک‌ها می‌توان به نتایج جالبی در حل معادلات رسید. همچنین کامکه در [۱۱] لیستی از حل معادلات مختلف را ارائه می‌دهد که با الگوی مطابقت با این لیست می‌توان به راه‌حل‌هایی رسید. محققین نیز در بسیاری مواقع سعی در توسعه این تکنیک‌ها می‌نمایند. آنها با پیدا کردن تبدیلاتی، معادلات مورد بحث را حالت خاصی از توسعه‌ها قرار می‌دهند که با تکنیک‌های معرفی شده به راحتی قابل حل باشند. این متد، برخی معادلات دیفرانسیل و حتی همان‌طور که در [۱۴] اشاره شده است، بعضی از آنها را که نمی‌توان انتظار داشت حل می‌کند ولی برخی اشکالات نیز وجود دارد. مهمترین آنها این است که اگر سیستم جبر محاسباتی به جواب رجوع نکند، هیچ اطلاعاتی به دست نمی‌آید. در واقع در این حالت امکان این وجود دارد که معادله دیفرانسیل داده شده هیچ جوابی نداشته باشد و یا اینکه محققین قادر به آرایه تبدیل مناسبی برای حل نباشند. بدین دلیل است که محققین در جبر محاسباتی به روشهای الگوریتم تصمیم‌علاقمند هستند. این روش‌ها دقیقاً تعیین می‌کنند که هیچ جوابی برای معادله داده شده وجود ندارد یا جواب‌ها مشمول رده خاصی از توابع می‌باشند. با این وجود، تا به حال این روش‌ها فقط برای معادلات دیفرانسیل معمولی خطی به کار برده شده‌اند. در یکی از این روش‌ها با کمک نظریه دیفرانسیلی گالوا می‌توان تعیین کرد که آیا جواب‌های لیوبلی برای معادله مفروض وجود دارد یا خیر.

لازم به ذکر است که نظریه محاسبات محدودیت‌های اصلی را برای جواب‌ها موجب می‌شود. به عنوان مثال اگر خود را محدود به توابع قابل محاسبه کنیم، آنگاه برخی قضایای وجودی کلاسیک در معادلات دیفرانسیل قابل استفاده نمی‌باشند (به مراجع [۱] و [۱۵] رجوع شود). به عبارت دقیق‌تر می‌توان مثال‌هایی از معادلات دیفرانسیل آرایه داد که دارای جواب باشند ولی قابل محاسبه نباشند. مطالب بیشتر در این مورد را می‌توان در مرجع [۴] پیدا کرد.

اصولاً آن‌طور که انتظار می‌رود الگوریتم جواب باید به جواب کلی برگردد. اما برای معادلات غیرخطی، حتی تعریف اصطلاحات مربوطه سخت می‌باشد. اخیراً در مرجع [۱۰] یک تحلیل قوی برای این مساله بر پایه نظریه دیفرانسیلی ایده‌آل آرایه شده است. به طور شهودی می‌توان گفت که جواب کلی وابسته به برخی پارامترهای کلی (ثابت یا توابع) دارد و این که هر جواب معادله دیفرانسیل با وابسته کردن برخی شرایط اولیه به این پارامترها و خصوصی کردن آنها حاصل می‌شوند. این روش برای معادلات خطی که فضای جواب آنها دارای ساختار یک فضای برداری می‌باشد بسیار کاراست. ولی بسیاری از این معادلات منجر به انتگرال‌های منفرد می‌شوند که مشمول در مجموعه جواب کلی نمی‌باشد. به هر حال می‌توان گفت که یک نظریه جواب قابل قبول برای معادلات دیفرانسیل معمولی وجود دارد (به مجموعه مروری [۱۲] رجوع شود) که بر اساس نظریه گالوای دیفرانسیل است. اما الگوریتم‌ها برای محاسبه جواب‌های کلی به ویژه برای معادلات با مرتبه بالاتر دارای پیچیدگی بسیاری است و می‌توان گفت که در عمل بی‌فایده است.

۳. سیستم‌های دینامیکی

کاربردهای جبر محاسباتی در سیستم‌های دینامیکی به طور مستقیم و با استفاده از نمادهای جبری نمی‌باشد. در واقع می‌توان گفت که این محاسبات عددی است که نقش مهمی در سیستم‌های دینامیکی در مقایسه با نمادهای جبری دارند. با این وجود جبر محاسباتی دارای نفوذ فزاینده در این زمینه به ویژه در زمینه تجزیه و تحلیل اختلالات دارد (به مرجع