



اعداد اول رامنوجان و حدس برتراند

مصطفی نجفی *

دانشگاه زنجان

چکیده

در این مقاله ابتدا اعداد اول رامنوجان^۱ را تعریف کرده و سپس با استفاده از این اعداد حدس برتراند^۲ را اثبات می‌کنیم، و در نهایت یک کران بهینه برای این اعداد بدست خواهیم آورد.

واژه‌های کلیدی: اعداد اول رامنوجان، حدس برتراند، رابطه‌ی مجانبی، کران

Mathematics Subject Classification [2010]: 11AXX, 11A41, 34E05

۱ مقدمه

سرینواسا رامنوجان^۳ یکی از نابغه‌ترین ریاضی‌دانان هم‌زمان‌ها که کشفیاتش امروزه هم پژوهشگران ریاضی‌دان را شگفت‌زده کرده است، یک سال قبل از مرگ زود هنگامش در سال ۱۹۱۹ تعمیمی از حدس برتراند را با کمک توابع چبیشف^۴ و خواص تابع گاما^۵ بیان و ثابت کرد. در این مقاله با استفاده از این تعمیم، اعداد اول رامنوجان را تعریف خواهیم کرد.

۲ نتایج اصلی

قضیه ۱.۲. فرض کنید $\pi(x)$ تابع شمارنده‌ی اعداد اول باشد، بدین معنا که نشان دهنده‌ی تعداد اعداد اول نابیشتر از x است. نشان دهید نامساوی زیر برای $x > 300$ برقرار است

$$\pi(x) - \pi\left(\frac{x}{2}\right) > \frac{1}{\log x} \left(\frac{1}{6}x - 3\sqrt{x}\right). \quad (1)$$

□

اثبات. به [۱] رجوع شود.

رامنوجان با استفاده از رابطه‌ی (۱) نوشت که نامساوی

$$\pi(x) - \pi\left(\frac{x}{2}\right) \geq 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, \dots, \quad (2)$$

به ترتیب برای $x \geq 2, 11, 17, 29, 41, 47, 59, \dots$ برقرار است. نامساوی رابطه‌ی (۲) بیان می‌کند که برای $x \geq 2$ در بازه‌ی $\left(\frac{1}{2}x, x\right]$ حداقل یک عدد اول وجود دارد، که این همان حدس برتراند است.

* سخنران

^۱Ramanujan numbers^۲Bertrand's Postulate^۳Srinivasa Ramanujan^۴Chebyshev functions^۵Gamma function