



لم اسپرنر و هم ارزی قضیه نقطه ثابت و قضیه هگز

بهباد صالحیان متی کلائی
دانشگاه دامغان

محبوبه شریفی*
دانشگاه دامغان

چکیده

هر نگاشت پیوسته f از یک بازه بسته به توی خودش دارای یک نقطه ثابت است که این قضیه به نام قضیه نقطه ثابت براور شناخته می‌شود و دارای گسترده‌ی وسیعی از کاربردها در ریاضی مدرن است. نکته جالب توجه این است که این قضیه به سادگی از یک لم ترکیبیاتی توسط اسپرنر (۱۹۲۸) نتیجه گرفته شد. لم ترکیبیاتی اسپرنر نوعی مثلث بندی سادگی است که یک مثلث را به مثلث‌های کوچک‌تر تقسیم می‌کند و طبق یک قاعده مشخص به برجسب‌گذاری گوشه‌های مثلث بزرگ می‌پردازد و این روند در اثبات قضیه نقطه ثابت با معرفی، مختصات مرکزی باری، یک اثبات ترکیبیاتی برای یک قضیه توپولوژی و آنالیز ریاضی ارائه می‌دهد. در پایان ضمن بیان تاریخچه بازی هگز هم ارزی قضیه هگز و قضیه نقطه ثابت براور را شرح می‌دهیم.

واژه‌های کلیدی: لم اسپرنر، قضیه نقطه ثابت، قضیه نقطه ثابت براور، بازی هگز
Mathematics Subject Classification [2010]: 05C78, 37C25, 37F20

۱ مقدمه

لم اسپرنر به تجزیه یک سادک (مثلث، چندوجهی، پاره خط و ...) به سادک‌های کوچک‌تر مربوط است. فرض کنید T یک مثلث بسته در صفحه است. تجزیه T به تعدادی متناهی مثلث‌های کوچک را مثلث‌بندی می‌نامیم که هر دو مثلث در یک رأس یا یک وجه مشترک، اشتراک دارند. فرض کنید یک تجزیه سادکی برای T داریم آن‌گاه برجسب‌گذاری رئوس مثلث‌های حاصل از تجزیه با نمادهای 0 ، 1 و 2 سره است هرگاه:

- هر سه رأس T به ترتیب دلخواه با 0 ، 1 و 2 برجسب‌گذاری شود و
- به ازای $0 \leq i \leq j \leq 2$ هر رأس روی یک وجه T متصل بین i و j یا با i یا با j برجسب‌گذاری شود.

به مثلی که در مثلث‌بندی رأس‌هایش دارای همه سه برجسب 0 ، 1 و 2 است، مثلث ممتاز گوئیم.

قضیه ۱.۱ (لم اسپرنر). هر تجزیه سادکی از یک مثلث با برجسب‌گذاری سره دارای تعدادی فرد مثلث ممتاز است [۴].

از آنجا که لم ترکیبیاتی اسپرنر برای هر سادک n بعدی ثابت شده است لذا می‌توان قضیه (۱.۱) را برای یک مربع در قالب لم زیر بیان کرد.

لم ۲.۱. فرض کنید Q یک مربع است که توسط خط‌های موازی اضلاع آن، به مربع‌های کوچک‌تری افزاز شده است. رأس‌های مربع Q با اعداد 1 ، 2 ، 3 ، 4 برجسب‌گذاری شده‌اند. رأس‌های این افزاز با همین اعداد طوری برجسب‌گذاری شده که برجسب هر رأس افزاز که روی یک ضلع از مربع Q واقع شده با برجسب یکی از رأس‌های انتهایی این ضلع برابر است. در این صورت وجهی در این افزاز وجود دارد که در رأس‌های آن حداقل سه برجسب متفاوت ظاهر شده است [۱].

* سخنران