



یک محدودکننده اساساً غیر نوسانی وزن دار ساده برای حل قوانین بقاء با روش گالرکین ناپیوسته رونگه کوتا

نقی کریمیان*

دانشگاه صنعتی سهند تبریز

دکتر جواد فرضی

دانشگاه صنعتی سهند تبریز

چکیده

در این مقاله، یک محدودکننده ساده بر اساس رهیافت اساساً غیر نوسانی وزن دار ($WENO$)^۱ برای روش های گالرکین ناپیوسته رونگه کوتا ($DGRK$)^۲ ارائه می شود که برای حل قوانین بقاء با هدف به دست آوردن جواب قوی و روند محدود سازی مرتبه بالا جهت دستیابی همزمان به دقت مرتبه بالای بکنواخت و عبور از شوک به صورت دقیق و غیر نوسانی مورد استفاده قرار می گیرد. ایده این محدودکننده بازسازی کل چند جمله ای به جای بازسازی مقادیر نقطه ای یا میان ها در بازسازیهای $WENO$ کلاسیک است. یعنی، چند جمله ای بازسازی در سلول هدف یک ترکیب محدب از چند جمله ایها در این سلول و سلولهای مجاور آن است و وزنه های غیر خطی ترکیب محدب از روند $WENO$ کلاسیک پیروی می کنند. مزیت اصلی این محدودکننده سادگی آن در پیاده سازی است. واژه های کلیدی: روش گالرکین ناپیوسته رونگه کوتا، محدودکننده $WENO$ ، معادلات بقاء.

۱ مقدمه و بیان مسئله

هدف حل معادلات بقاء هذلولوی به شکل زیر است

$$\begin{cases} u_t + f(u)_x = 0, \\ u(x, 0) = u_0(x). \end{cases} \quad (1)$$

که در آن توابع $u: R \times [0, \infty) \rightarrow R^n$ جواب ضعیف و $f: R^n \rightarrow R^n$ شار می باشد. در اینجا فقط حالت اسکالر ($n = 1$)، مورد بررسی قرار داده می شود. بعد از آنکه u با روش RKDG [۱] به دست آمد، روند پردازش پسین زیر را که حاصل از محدودکننده $WENO$ می باشد طرح و سپس اجرا خواهد شد [۲].

ابتدا سلول آشفته شده، یعنی سلولی که در آن ناپیوستگی رخ داده است مشخص می شود. بدین ترتیب که ابتدا میانگین های سلولی زیر در نظر گرفته می شوند

$$\bar{u}_j = \frac{1}{\Delta x_j} \int_{I_j} u dx, \quad \Delta x_j = x_{j+1/2} - x_{j-1/2}, \quad I_j = [x_{j-1/2}, x_{j+1/2}].$$

و نیز

$$\tilde{u}_j = u_{j+1/2}^- - \bar{u}_j, \quad \tilde{\tilde{u}}_j = \bar{u}_j - u_{j-1/2}^+,$$

که در آن $\tilde{u}_j$ و $\tilde{\tilde{u}}_j$ هردو به وسیله ی محدودکننده minmod معمولی به شکل زیر اصلاح می شوند [۳]

$$\tilde{u}_j^{(mod)} = m(\tilde{u}_j, \Delta_+ \bar{u}_j, \Delta_- \bar{u}_j), \quad \tilde{\tilde{u}}_j^{(mod)} = m(\tilde{\tilde{u}}_j, \Delta_+ \bar{u}_j, \Delta_- \bar{u}_j).$$

* سخنران

^۱ Weighted Essentially Nonoscillatory Limiter^۲ Runge-Kutta Discontinuous Galerkin