



روش اجزای محدود گالرکین برای حل معادله دیفرانسیل انتشار با چند ترم مشتقات زمان-مکان ریتز کسری در فضای دو بعدی

زینب غریبی*

دانشگاه تربیت مدرس

محمدرضا اصلاحچی

دانشگاه تربیت مدرس

چکیده

مسئله مقدار مرزی-اولیه برای معادلات انتشار با چند ترم مشتقات زمان-مکان ریتز در فضای دو بعدی در نظر می‌گیریم. فرم ضعیف و هم‌چنین طرح نیمه گسسته مسئله را بوسیله روش اجزای محدود گالرکین، بدست می‌آوریم و وجود و یکتایی جواب ضعیف را ثابت می‌کنیم. علاوه بر این یک طرح کاملاً گسسته بر اساس روش تفاضلات متناهی برای گسسته سازی مشتقات زمان توسعه داده شده است و وجود، پایداری و همگرایی جواب بحث شده است.

واژه‌های کلیدی: روش اجزای محدود، معادله دیفرانسیل انتشار با چند ترم مشتقات زمان

Mathematics Subject Classification [2010]: 13D45, 39B42

۱ مقدمه

محاسبات کسری شاخه‌ای از ریاضی است که در مورد انتگرال و مشتق از مرتبه‌های دلخواه بحث می‌کند. اخیراً محاسبات کسری با توجه به کاربرد گسترده در علوم و مهندسی به یک موضوع داغ تبدیل شده است. به خوبی می‌دانیم که جواب‌های تحلیلی برای معادلات دیفرانسیل کسری به سختی بدست می‌آیند و (اگر خوشبختانه بدست آیند) همیشه شامل سری نامتناهی است که ارزیابی آن خیلی هزینه بر است. بنابراین ما به برخی از روش‌های عددی متوسل می‌شویم. روش اجزای محدود یکی از روش‌های عددی برای حل معادلات دیفرانسیل کسری است، که همیشه با مرتبه همگرایی بالا است و هنوز در مرحله اول توسعه است. تاکنون، نویسندگان بیشتر توجه خود را به استفاده از روش اجزای محدود برای معادلات دیفرانسیل چند ترم زمان-مکان کسری یک بعدی متمرکز کرده‌اند و تنها تعداد اندکی از محققان به مسائل دو بعدی بحث کرده‌اند. در این مقاله، مسئله مقدار مرزی-اولیه زیر برای معادله انتشار چندترم زمان-مکان ریتز کسری در نظر می‌گیریم

$$\begin{aligned} P({}_0^C D_t) u(x, y, t) &= \kappa_1 {}^R D_{|x|}^\beta u(x, y, t) + \kappa_2 {}^R D_{|y|}^\gamma u(x, y, t), \\ (x, y, t) &\in \Omega \times (0, T], \\ u(x, y, 0) &= g(x, y), \quad (x, y, t) \in \Omega \\ u(x, y, t) &= 0, \quad (x, y, t) \in \partial\Omega \times (0, T] \end{aligned} \quad (1)$$

که $\kappa_1 \geq 0$, $\kappa_2 \geq 0$ و g تابع پیوسته، $1 < \beta, \gamma \leq 2$ مرتبه‌های مشتق مکان کسری و $\Omega = [a, b] \times [c, d]$ ناحیه مسئله می‌باشد. در اینجا عملگر دیفرانسیل $P({}_0^C D_t)$ بصورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$P({}_0^C D_t) = \sum_{i=1}^m b_i {}_0^C D_t^{\alpha_i}.$$