



شبه‌پیوستگی قوی توابع دو متغیره

اکرم پورمعمار دزفولی*

دانشگاه فردوسی

سیدعلیرضا کامل میرمصطفایی

دانشگاه فردوسی

چکیده

بئر در سال ۱۸۹۹ برای اولین بار نقاط پیوستگی توابع دو متغیره‌ی حقیقی مقدار را مورد بررسی قرار داد. در این مقاله تعمیم‌های مختلف قضیه بئر را بررسی خواهیم کرد. در حقیقت با در نظر گرفتن فضاهای توپولوژیک X ، Y و Z شرایطی را ارزیابی می‌کنیم که یک تابع دو متغیره مانند $f: X \times Y \rightarrow Z$ ، پیوسته و یا شبه‌پیوسته‌ی توأم باشد به شرط آن که این تابع نسبت به هر متغیر با ثابت نگه داشتن متغیر دیگر شبه‌پیوسته باشد.

واژه‌های کلیدی: فضای بئر، توابع شبه‌پیوسته، فضای نامیوکا، بازی‌های توپولوژیک.

Mathematics Subject Classification [2010]: 54C30, 54C35, 54C05, 46E15

۱ مقدمه

فرض کنیم X ، Y و Z فضاهای توپولوژیک باشند. تابع $f: X \times Y \rightarrow Z$ را به طور مجزا پیوسته نامیم هرگاه برای هر $(x_0, y_0) \in X \times Y$ ، توابع $f(., y_0): X \rightarrow Z$ و $f(x_0, .): Y \rightarrow Z$ پیوسته باشند. بئر [۱] برای اولین بار نشان داد که برای هر تابع به طور مجزا پیوسته‌ی $f: \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ می‌توان یک مجموعه چگال و G_δ مانند D از $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ یافت که $f|_{D \times \mathbb{R}}$ پیوسته‌ی توأم باشد. تعمیم‌های مختلفی از قضیه بئر ارائه شده است [۳، ۵، ۶، ۸، ۹]. فرض کنیم X و Y فضاهایی توپولوژیک باشند. تابع $f: X \rightarrow Y$ شبه‌پیوسته است هرگاه برای مجموعه‌های باز $U \subseteq X$ و $V \subseteq Y$ که $f(U) \cap V \neq \emptyset$ ، مجموعه‌ی باز و ناتهی $G \subseteq U$ وجود داشته باشد به طوری که $f(G) \subseteq V$. در سال ۱۹۷۴ کمپستی [۵] تعمیمی از مفهوم پیوستگی چنین ارائه داد که هرگاه X ، Y و Z فضاهایی توپولوژیک باشند، در این صورت تابع $f: X \times Y \rightarrow Z$ کمپستی-تابع (KC -تابع) نام دارد اگر نسبت به متغیر اول شبه‌پیوسته و نسبت به متغیر دوم پیوسته باشد.

تابع $f: X \times Y \rightarrow Z$ را در $(x, y) \in X \times Y$ شبه‌پیوسته‌ی قوی نامیم هرگاه برای هر همسایگی W از $f(x, y)$ در Z و هر حاصلضرب از مجموعه‌های باز $U \times V \subset X \times Y$ شامل نقطه (x, y) ، همسایگی‌های باز و ناتهی $V_1 \subset V$ از نقطه y و $U_1 \subset U$ وجود داشته باشند به طوری که $f(U_1 \times V_1) \subset W$. واضح است که هر تابع به طور مجزا پیوسته، شبه‌پیوسته‌ی قوی است، اما عکس این مطلب درست نیست. به عنوان مثال تابع $f: \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ که با ضابطه‌ی $f(x, y) = [x]y$ تعریف می‌شود شبه‌پیوسته‌ی قوی است ولی به طور مجزا پیوسته نیست.

در این مقاله می‌خواهیم با استفاده از بازی‌های توپولوژیکی، نقاط پیوستگی KC -توابع را بیابیم. این پژوهش برخی از نتایج قبلی پتروفسکی [۳، ۶، ۹] را بهبود می‌بخشد.