



تخمین بزرگی مشتق چندجمله‌ای‌های موجکی

ابراهیم تمیمی

دانشگاه ولایت

چکیده

بسیاری از قضایای نظریه تقریب مربوط به این حقیقت هستند که آهنگ تغییر چند جمله‌ای‌های با درجه بالا از سرعت کمی برخوردار است؛ به عبارت دیگر مشتق آنها نمی‌تواند خیلی بزرگ باشد. قبلاً بزرگی مشتق چند جمله‌ای‌های جبری و مثلثاتی نسبت به خودشان برآورد شده است. در این مقاله می‌خواهیم بزرگی (اندازه) مشتق چند جمله‌ای‌های موجکی را توسط خود چند جمله‌ای‌های موجکی تخمین بزنیم.

واژه‌های کلیدی: آنالیز چندریزی متناوب، پایه‌ی متعامد یکه، تخمین بزرگی مشتق، چند جمله‌ای‌های موجکی، نامساوی برنشتاین

Mathematics Subject Classification [2010]: 41A17, 42A10

۱ مقدمه

در ۲۰ سال گذشته، علاقه به مطالعه‌ی موجک‌ها بوسیله‌ی کاربردهای آنها گسترش یافت. با تکرار مشتق، می‌توان بزرگی مشتقات مراتب بالای چند جمله‌ای‌های جبری و مثلثاتی را به کمک نامساوی برنشتاین^۱ تخمین زد [۳]. حال به کمک نامساوی برنشتاین، می‌خواهیم این کار را برای چند جمله‌ای‌های موجکی انجام دهیم. در این بخش نمادها و تعاریفی را که در طول مقاله از آنها استفاده می‌شود، ارائه می‌دهیم. در بخش دوم، دو لم و یک نتیجه‌ی فوری از آنها را بیان می‌کنیم. در بخش آخر قضیه‌ی اصلی را که هدف این مقاله است، بیان کرده و اثبات می‌کنیم.

تعریف ۱.۱. یک موجک (موجک مادر^۲) تابعی است چون $\psi \in L_2(\mathbb{R})$ ، که خانواده‌ی توابع $\psi_{jk} = 2^{j/2} \psi(2^j \cdot + k)$ برای اعداد صحیح j, k یک پایه متعامد یکه در فضای هیلبرت $L_2(\mathbb{R})$ تشکیل دهند.

می‌دانیم که برای اندازه‌گیری یک موج یا تابع جهت مشخص کردن خواص موضعی آن، از آنالیز چندریزی استفاده می‌کنیم [۱]. در سراسر مقاله، فرض بر این است که $\mathbb{T}$ دایره‌ی یکه، φ ثابت وابسته به آنالیز چندریزی و $\psi \in L_2(\mathbb{R})$ که ϕ تابع مقیاس^۳ (موجک پدر) آنالیز چندریزی و ψ تابع موجک مادر می‌باشند [۱]. در نظر بگیرید که توابع ψ, ϕ به اندازه کافی میرا باشند، آن‌گاه بنا به [۴] خواهیم داشت:

$$\max(|\phi(x)|, |\psi(x)|) \leq \frac{\varphi}{1 + |x|^{1+\epsilon}}, \quad \epsilon > 0 \quad (1)$$

در این صورت بدیهی است که توابع

$$\Phi_{jn}(x) = 2^{j/2} \sum_{\ell \in \mathbb{Z}} \phi(2^j x + 2^j \ell + n),$$

^۱Bernstein's inequality

^۲Mother wavelet

^۳Scaling function