



محاسبه‌ی معکوس توابع لگاریتمی به کمک تابع لامبرت

مصطفی نجفی *

دانشگاه زنجان

چکیده

در این مقاله ابتدا تابع لامبرت^۱ را تعریف و سپس یک کران بهینه برای این تابع بدست خواهیم آورد، و در نهایت با استفاده از این تابع معکوس توابع نمایی و لگاریتمی را با اثبات قضیه‌ای محاسبه خواهیم کرد.^۲

واژه‌های کلیدی: تابع لامبرت، رابطه‌ی مجانبی، کران، معکوس

Mathematics Subject Classification [2010]: 65D20, 34E05, 33B30

۱ مقدمه

محاسبه‌ی معکوس برخی توابع نمایی و لگاریتمی با روشهای مقدماتی دشوار و یا غیرممکن است، ولی به کمک تابع لامبرت می‌توان معکوس آنها را بدست آورد.

تعریف ۱.۱. تابع لامبرت را برای $x \geq -\frac{1}{e}$ به صورت زیر تعریف می‌شود

$$W(x)e^{W(x)} = x, \quad (1)$$

که در فاصله‌ی $(-\frac{1}{e}, 0)$ لامبرت به ازای هر x دو مقدارده می‌باشد، بنابراین تابع لامبرت را به دو شاخه‌ی $W_0(x)$ برای $W(x) \geq -1$ و $W_{-1}(x)$ برای $W(x) \leq -1$ تقسیم می‌کنیم، تا شرط تابع بودن را داشته باشد.

۲ نتایج اصلی

بسط تابع لامبرت به صورت زیر است

$$W(x) = \log x - \log \log x + \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} C_{km} \frac{(\log \log x)^m}{(\log x)^{k+m}}, \quad (2)$$

بطوریکه $C_{km} = \frac{(-1)^k}{m!} S[k+m, k+1]$ ، که در آن $S[k+m, k+1]$ اعداد استرلینگ^۳ هستند. برای x های بقدر کافی بزرگ داریم

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\log \log x}{\log x} = 0.$$

* سخنران

^۱Lambert W-Function^۲تابع لامبرت دابلو به افتخار ریاضی‌دان سوئیس یوهان هاینریش لامبرت به انگلیسی Johann Heinrich Lambert نام‌گذاری شده است.^۳Stirling numbers