



طرح تفاضلات متناهی فشرده ضمنی مرتبه چهارم معادله برگز یک بعدی

مینا رضائزاد

دانشگاه صنعتی ارومیه

احمد رضا حقیقی*

گروه ریاضی دانشگاه صنعتی ارومیه، آموزشکده شهید بهشتی ارومیه

چکیده

در این مقاله یک طرح تفاضلات متناهی فشرده ضمنی مرتبه چهارم برای حل معادله برگز یک بعدی ارائه شده است که بر اساس تبدیل هوپف-کول معادله غیرخطی اولیه برگز را به یک معادله حرارت خطی و شرایط مرزی دیریکله را به شرایط مرزی رابین تبدیل می کند. سپس معادله حرارت خطی با استفاده از طرح تفاضلات متناهی فشرده ضمنی مرتبه چهارم حل شده است. نتایج عددی نشان می دهد که این روش بدون هیچ شرایطی پایدار است و هیچ محدودیتی در اندازه گام زمانی وجود ندارد.

واژه های کلیدی: طرح تفاضلات متناهی، معادله برگز، پایداری

Mathematics Subject Classification [2010]: 65M06, 65N22

۱ مقدمه

معادله برگز یک بعدی را به صورت زیر در نظر می گیریم [۱]

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + \nu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (1)$$

با شرایط اولیه $u(x, 0) = f(x)$ و شرایط مرزی $u(0, t) = \alpha(t)$, $u(1, t) = \beta(t)$, $t \in (0, T]$ $0 < x < 1$

که در آن $\nu = \frac{1}{Re}$ مشخص کننده اندازه ویسکوزیته می باشد، Re نشانگر عدد رینولدز است. معادله برگز (۱) یکی از مهم ترین معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی در مکانیک سیالات است [۲]. در [۳] نویسندگان به جای حل معادله برگز اصلی یک حل عددی را بر اساس تبدیل هوپف-کول پیشنهاد کرده اند. ابتدا معادله حرارت خطی با استفاده از روش تفاضلات متناهی صریح حل شده است. پس از آن برای به دست آوردن حل معادله برگز اصلی تغییر اعمال می شود. در این مقاله معادله گرما خطی بر اساس تبدیل هوپف-کول با استفاده از طرح تفاضلات متناهی فشرده ضمنی مرتبه چهارم حل شده است. طرح تفاضلات متناهی مرتبه چهارم: معادله برگز را با استفاده از تبدیل هوپف-کول می توان به یک معادله حرارتی تبدیل کرد [۴]

$$u(x, t) = -\nu \frac{w_x(x, t)}{w(x, y)} \quad (2)$$

که $w(x, t)$ معادله حرارتی زیر را برآورد می کند:

$$\frac{\partial w}{\partial t} = \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}, \quad 0 < x < 1, t \in (0, T]$$