بررسی نمونه‌هایی ازجمع‌های روی جزءکسری

زهرا حسنلو *
دانشگاه زنجان

چکیده

در این مقاله به نمونه‌هایی از جمع‌های روی جزءکسری روی اعداد حقیقی، اعداد صحیح و همچنین اعداد اول می‌پردازیم. ابتدا روش هذلولی دیریشله را بیان و شرح می‌دهیم و به کمک این روش قضایا و نتایج مربوط به جمع روی جزءکسری را اثبات می‌کنیم.

واژه‌های کلیدی: جمع جزءکسری، ضرب پیچشی، روش هذلولی دیریشله، تابع زتای ریمان
Mathematics Subject Classification [2010]: 11J70, 11A41,11P82

۱ مقدمه

برای هر $x \in \mathbb{N}$ جزءکسری x به صورت زیر تعریف می‌شود

$$\{x\} = x - [x]\,.$$

تعریف ۱.۱ (ضرب پیچشی). اگر f و g دو تابع حسابی باشند، آنگاه ضرب پیچشی (یا ضرب دیریشله) f و g را با نماد $f * g$ نشان داده و به صورت $(f*g)(n) = \sum_{d|n} f(d)g(\frac{n}{d})$ به ازای هر $n \in \mathbb{N}$ تعریف می‌شود .

در این مقاله به نمونه‌هایی از جمع‌های روی جزءکسری می‌پردازیم و با استفاده از مقدماتی که به آنها اشاره خواهیم کرد، احکام زیر را بیان و برخی از آنها را اثبات خواهیم کرد.

قضیه ۲.۱. *برای عدد حقیقی $x \geqslant ۱$ و اعداد صحیح $a, b \neq ۰$ داریم*

$$\sum_{\substack{d \leqslant x \\ d \equiv b \pmod a}} \left\{\frac{x}{d}\right\} = \frac{x}{a}\,(۱-\gamma) + O\left(\sqrt{x}\right).$$

که در اینجا γ ثابت اویلر با مقدار تقریبی $\gamma \cong ۰/۵۷۷۲۱۵۶۶۴۹$ است.

قضیه ۳.۱. *برای $x \geqslant ۱$ داریم*

$$\sum_{n \leqslant x} \left\{\frac{x}{n}\right\} = (۱-\gamma)\,x + O(\sqrt{x}).$$

* سخنران